**2. BILANGAN REAL**

**2.0. PENDAHULUAN**

Himpunan bilangan real mencakup himpunan bilangan rasional,himpunan bilangan irasional, himpunan bilangan bulat, himpunan bilangan cacah dan himpunan bilangan asli.

1. Himpunan bilangan asli **A** = { 1, 2, 3, 4, ... }

Bilangan asli terdiri atas

1. Bilangan asli yang mempunyai satu faktor, yaitu 1.
2. Bilangan asli yang mempunyai dua faktor, yaitu 2, 3, 5, 7 dan seterusnya. Bilangan ini disebut bilangan prima.
3. Bilangan asli yang mempunyai lebih dari dua faktor, yaitu 4, 6, 8, 9 ... Bilangan ini disebut bilangan komposit.
4. Himpunan bilangan cacah **W** = { 0, 1, 2, 3, ... }

Bilangan cacah terdiri atas 0 dan bilangan asli.

1. Himpunan bilangan bulat **B** = { ..., -2, -1, 0 , 1, 2, ... }

Bilangan bulat terdiri atas bilangan cacah dan negatif bilangan asli.

Bilangan bulat kelipatan dua (2) disebut bilangan genap dan selainnya disebut bilangan

ganjil.

1. Himpunan bilangan rasional **Q**, adalah himpunan yang anggota-anggotanya dapat

dinyatakan dalam bentuk p/q, dengan p, q bilangan bulat dan q ≠ 0.

Bilangan rasional dapat dinyatakan sebagai bentuk desimal berulang.

Misal, 2 = 2,75000000 ; 1 = 1,66666666 dan seterusnya.

Bilangan rasional yang nilai p ***habis dibagi*** oleh q disebut bilangan bulat, selainnya

disebut bilangan pecahan.

Himpunan **bilangan Irasional**, adalah himpunan yang anggota anggotanya tidak dapat

dinyatakan dalam bentuk p/q, dengan p, q bilangan bulat dan q ≠ 0.

Bilangan irasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai desimal

berulang. Misal,

√3 = 1, 732050807 ; log 2 = 0.301029995 dan seterusnya.

**2.1. SISTEM BILANGAN REAL**

Bilangan real ( **R** ) merupakan gabungan dari bilangan rasional **Q** dan bilangan Irasioanal.

Sistem bilangan real adalah himpunan bilangan real **R** yang disertai dengan dua buah operasi yaitu penjumlahan dan perkalian sehingga memenuhi 3 aksioma yaitu aksioma lapangan, urutan dan kelengkapan.

***Aksioma Lapangan***

Himpunan semua bilangan real **R** terhadap operasi-operasi penjumlahan dan perkalian merupakan lapangan.

***Dengan rincian:***

I. **R** terhadap operasi penjumlahan (**R**, +) merupakan **grup abelian**, yaitu:

A.1. Sifat tertutup terhadap penjumlahan

∀a,b ∈ **R** berlaku (a + b) ∈ **R**,

A.2. Sifat komutatif terhadap penjumlahan

∀a,b ∈ **R** berlaku a + b = b + a,

A.3. Sifat assosiatif terhadap penjumlahan

∀a, b, c ∈ **R** berlaku (a + b) + c = a + (b + c),

A.4. Adanya unsur kesatuan (identitas) pada penjumlahan

**∃** 0 ∈ **R** ∍ a + 0 = a = 0 + a,

A.5. Adanya inversi pada penjumlahan

∀a ∈ **R**, **∃** (-a) ∈ **R** ∍ a + (-a) = 0 = (-a) + a.

II. **R** terhadap operasi perkalian (**R**, x) merupakan grup abelian, yaitu:

M.1. Sifat tertutup terhadap perkalian

∀a,b ∈ **R** berlaku (a x b) ∈ **R**,

M.2. Sifat komutatif terhadap perkalian

∀a,b ∈ **R** berlaku a x b = b x a,

M.3. Sifat assosiatif terhadap perkalian

∀a,b,c ∈ **R** berlaku (a x b) x c = a x (b x c),

M.4. Adanya unsur kesatuan (identitas) pada perkalian

**∃**1 ∈ **R** ∍ a x 1 = a = 1 x a,

M.5. Adanya inversi pada perkalian

∀a ≠ 0 ∈ **R**, **∃**() ∈ **R** ∍ a x  = 1 =  x a.

III. **R** terhadap penjumlahan dan perkalian bersifat distributif (distributif perkalian

terhadap penjumlahan) yaitu:

∀a, b, c ∈ **R** → a x (b + c) = (a x b) + (a x c) dan

(a + b) x c = (a x c) + (b x c).

Sebelum menjelaskan aksioma urutan dan aksioma kelengkapan, terlebih dahulu diberikan beberapa teorema yang berhubungan dengan sifat-sifat aljabar elementer yang dapat

dibuktikan dengan menggunakan aksioma lapangan.

**Teorema 2.1.1.** *(a) Jika z dan a elemen-elemen dalam* ***R****, sehingga z + a = a, maka z = 0.*

*(b) Jika u dan b ≠ 0 elemen-elemen dari R, sehingga u x b = b, maka u = 1.*

**Bukti.** (a) z + a = a [hipotesis]

z + a + (-a) = a + (-a) [kedua ruas + (-a) dari kanan]

z + (a + (-a)) = (a + (-a)) [sifat asosiatif (A.3)]

z + 0 = 0 [sifat inversi (A.5)]

z = 0 [sifat identitas (A.4)]

(b) u x b = b ; b ≠ 0 [hipotesis]

u x bx 1/b = bx 1/b [kedua ruas x 1/b dari kanan ]

u x (bx 1/b ) = (bx 1/b) [sifat asosiatif (M.3)]

u x 1 = 1 [sifat inversi (M.5)]

u = 1 [sifat identitas (M.4)]

**Teorema 2.1.2.** *(a) Jika a dan b elemen-elemen dalam* ***R*** *sehingga a + b = 0, maka b = -a.*

*(b) Jika a ≠ 0 dan b elemen-elemen dalam* ***R*** *sehingga a x b = 1, maka b =  .*

**Bukti.** (a) a + b = 0 [hipotesis]

(-a) + a + b = (-a) + 0 [kedua ruas + (-a) dari kiri]

((-a) + a) + b = ((-a) + 0) [sifat asosiatif (A.3)]

0 + b = ((-a) + 0) [sifat inversi (A.5)]

b = (-a) [sifat identitas]

(b) a x b = 1 ; a ≠ 0 [hipotesis]

x a x b = x 1 [kedua ruas x  dari kiri]

( x a) x b = x 1 [sifat asosiatif (M.3)]

1 x b = ( x 1) [sifat inversi (M.5)]

b =  [sifat identitas (M.4)]

**Teorema 2.1.3.** *Misal a, b elemen-elemen sebarang dalam* ***R*** *maka:*

*(a) persamaan a + x = b mempunyai penyelesaian tunggal x = (-a) + b,*

*(b) Jika a ≠ 0, persamaan a x = b mempunyai penylesaian tunggal x =  .*

**Bukti.** (a) a + x = b [hipotesis]

(-a) + a + x = (-a) + b [kedua ruas + (-a) dariu kiri]

((-a) + a) + x = ((-a) + b) [sifat asosiatif (A.3)]

0 + x = ((-a) + b) [sifat inversi (A.5)]

x = (-a) + b [sifat identitas (A.4)]

untuk menunjukkan bahwa persamaan di atas hanya mempunyai penyelesaian

tunggal, anggap bahwa x penyelesaian dari persamaan tersebut, maka

a + x = b

(-a) + a + x = (-a) + b [kedua ruas + (-a) dari kiri]

(-a) + a) + x = ((-a) + b) [sifat asosiatif (A.3)]

0 + x =((-a) + b) [sifat inversi (A.5)]

x = (-a) + b [sifat identitas (A.4)]

Ternyata penyelesaian dari persamaan di atas x = x , yaitu merupakan

penyelsaian tunggal.

(b) a x = b ; a ≠ 0

. a x = . b [kedua ruas dikali  dari kiri]

(. a) . x = ( .b) [sifat asosiatif (M.3)]

1 . x = (. b) [sifat inversi (M.5)]

x = (.b) [sifat identitas (M.4)]

x =  [(. b) = ]

untuk menunjukkan bahwa persamaan di atas hanya mempunyai penyelesaian

tunggal, anggap bahwa x1 penyelesaian dari persamaan tersebut, maka

a x1 = b

. a. x1 = . B [kedua ruas dikali  dari kiri]

(. a) . x = (. b) [sifat asosiatif (M.3)]

1 . x = (. b) [sifat inversi (M.5)]

x = (. b) [sifat identitas (M.4)]

x =  [(. b) =  ]

Ternyata penyelesaian dari persamaan di atas x = x1, yaitu merupakan

penyelsaian tunggal.

**Teorema 2.1.4.** *Jika a sebarang elemen dari* ***R****, maka:*

*(a) a . 0 = 0*

*(b) (-1) . a = -a*

*(c) -(-a) = a*

*(d) (-1) . (-1) = 1*

**Bukti.** (a) a(1 + 0)) = a . 1 [1 = 1 + 0 (A.4)]

a . 1 + a . 0 = a . 1 [sifat distributif]

a + a .0 = a [sifat identitas (M.4)]

⇒ a . 0 = 0

(b) a + (-1) . a = 1 . a + (-1) . a [a . 1 = a (M.4)]

= (1 + (-1)) . a [distributif kanan]

= 0 . a [sifat inversi (A.5)]

= 0 [0 . a = 0, teorema 2.1.4.a.]

Jadi, (-1) . a = (-a) [a + (-a) = 0]

(c) a + (-a) = 0 [sifat inversi (A.5)]

(-a) + -(-a) = 0 [analog dengan A.5 ]

-(-a) + (-a) = 0 [sifat komutatif (A.2)]

Jadi -(-a) = a

(d) (-1) . a = -a [teorema 2.1.4.b]

jika a = (-1), maka

(-1) . (-1) = -(-1) [analog dengan teorema 2.1.4b]

= 1 [teorema 2.1.4.c]

**Teorema 2.1.5.** *Misalkan a, b, c ∈* ***R***

*(a) a ≠ 0 → ≠ 0 dan  = a*

*(b) a . b = a . c dan a ≠ 0 → b = c*

*(c) a . b = 0 → a = 0 atau b = 0*

**Bukti**. (a) a ≠ 0, maka terdapat  [M.5]

andaikan  = 0

⇒ 1 = a . = a . 0 = 0

kontradiksi dengan sifat inversi (M.5), maka pengandaian salah dan

yang benar ≠ 0.

≠ 0 → . a = 1 = a .

a . = 1 → b . = 1

misal b = → . = 1

Jadi,  = a.

(b) Diketahui a . b = a . c dengan a ≠ 0.

. a . b = . a . c [kedua ruas x  ]

(. a) . b = (. a). c [sifat asosiatif (M.2)]

1 . b = 1 . c [sifat inversi (M.5)]

b = c [identitas (M.4)]

(c) Diketahui a . b = 0 dan a ≠ 0

Dari teorema 2.1.4a. diketahui bahwa a . 0 = 0, maka

a . b = a . 0

b = 0 [teorema 2.1.5b.]

Jadi, a . b = 0 dan a ≠ 0 , maka b = 0.

Dengan cara yang sama, untuk b ≠ 0 dan a . b = 0 diperoleh a = 0.

Disimpulkan, bahwa a . b = 0 → a = 0 atau b = 0.

Berikut diberikan definisi-definisi dari

Pengurangan:

a - b = a + (-b) ∀a,b ∈ **R**.

Pembagian:

 = a .  ∀a,b ∈ **R** dan b ≠ 0.

Eksponen:

a2 = a . a = aa ∀a ∈ **R**.

a3 = a2. a = (a2 )a

..

..

an+1 = an. a = (an )a ∀a ∈ **R**.

a0 = 1 dan a1 = a .

a-1 =  ∀a ∈ **R**.dan a ≠ 0.

a-n = ()n ∀n ∈.**A**

**BILANGAN RASIONAL**

Elemen-elemen **R** yang dapat ditulis dalam bentukdengan a, b bilangan bulat dengan b ≠ 0 disebut *bilangan rasional*. Himpunan semua bilangan rasional dilambangkan dengan **Q**. Jumlah dan hasil kali dari dua bilangan rasional adalah bilangan rasional (bersifat tertutup). Tunjukkan !

**Teorema 2.1.6.** *Tidak terdapat bilangan rasional r sehingga r2 = 2.*

**Bukti.** Anggap bahwa terdapat bilangan bulat a dan b sehingga

r = ()2 = 2 dengan faktor persekutuan 1. (Why?)

()2 = 2 ⇒ a2 = 2 b2

a2 genap ⇒ a genap.

(Misal a ganjil, yaitu a = 2k + 1 dengan k ∈ **B**

maka a = 4k2 + 4k + 1, juga bilangan ganjil)

Misal a = 2m dengan m ∈ **B**

maka a2 = 4m2 = 2 b2

2m2 = b2

berarti b2 genap, maka b juga genap.

Dengan demikian, faktor persekutuan a dan b ≠ 1. (Why?)

Mengakibatkan kontradiksi bahwa faktor peresekutuan a dan b = 1.

Jadi, tidak terdapat bilangan rasional r sehingga r2 = 2.

**L A T I H A N 2.1**

1. Selesaikan persamaan-persamaan berikut dengan menggunakan sifat-sifat

atau teorema-teorema yang ada.

a. 2x + 3 = 6

b. x2 = 3x

c. (x + 2)(x -3) = 0

2. Jika a,b ∈ **R**, buktikan:

a. -(a + b) = (-a) + (-b)

b. (-a)(-b) = ab

c. 1/(-b) = -(1/b) b ≠ 0.

3. Jika a ∈ **R** dan memenuhi a . a = a, buktikan a = 0 atau a = 1.

4. Jika a ≠ 0 dan b ≠ 0, tunjukkan bahwa 1/(ab) = (1/a)(1/b)

5. Dengan memodivikasi *teorema 2.1.6*. tunjukkan bahwa tidak ada bilangan rasional s

sehingga s2 = 3.

6. Jika a, b bilangan irasional, tunjukkan bahwa a + b dan ab bukan bilangan irasional.

7. Misal B suatu operasi biner pada R dan R terhadap operasi B bersifat:

a. komutatif, yaitu B(a,b) = B(b,a) ∀a,b ∈ **R**,

b. asosiatif, yaitu B(a, B(b,c)) = B(B(a,b)c) ∀a,b,c ∈ **R**,

c. mempunyai unsur identitas e ∈ **R** ∍ B(a,e) = a = B(e,a)

Manakah diantara operasi-operasi biner berikut yang meme-

nuhi sifat di atas?

1. B1 (a,b) = 1/2(a + b) 2. B2 (a,b) = 1/2(ab)

3. B3 (a,b) = a - b 4. B4 (a,b) = 1 + ab

8. Dengan menggunakan induksi matematika tunjukkan:

a. am+n = aman ∀a ∈ **R** dan m,n ∈ **A**,

b. (am )n = amn ∀a ∈ **R** dan m,n ∈ **A**.

**2.2. Aksioma Urutan Pada Bilangan Real**

Terdapat himpunan bagian tak kosong P dari **R** yang unsur- unsurnya dinamakan bilangan positip sejati, bila

memenuhi aksioma berikut:

a. jika a, b ∈ P maka a + b ∈ P,

b. jika a, b ∈ P maka ab ∈ P,

c. jika a ∈ R maka memenuhi tepat satu dari

a ∈ P, a = 0, -a ∈ P.

Sifat-sifat a dan b adalah sifat urutan pada operasi penjumlahan dan perkalian. Kondisi c. disebut sifat trichotomi karena membagi elemen-elemen **R** atas tiga bagian yang berbeda. Himpunan {-a | a ∈ P}bilangan real negatif sejati (murni) yang tidak mempunyai elemen yang bersekutu dengan P. Selanjutnya **R** merupakan gabungan dari tiga himpunan yang saling terpisah (disjoint).

**Definisi 2.2.1**. Jika a ∈ P, maka a dikatakan bilangan positif sejati dan ditulis a > 0. Jika a ∈ P atau a = 0, maka dikatakan bahwa a bilangan real positif dan ditulis a ≥ 0. Jika -a ∈ P dikatakan bahwa a bilangan real negatif sejati dan ditulis a < 0. Jika -a ∈ P atau a = 0,dikatakan bahwa a bilangan real negatif dan ditulis a ≤ 0.

Berikut disajikan idea pertidaksamaan dalam bilangan real.

**Definisi 2.2.2.** Misal a, b elemen-elemen dari **R**.

i. Jika (a - b) ∈ P, maka ditulis a > b atau b < a.

ii. Jika (a - b) ∈ (P ∪ {0}), maka ditulis a ≥ b atau b ≤ a.

Notasi a < b < c, berarti a < b dan b < c.

Dengan cara yang sama a ≤ b < c, berarti a ≤ b dan b < c.

***Sifat-Sifat Urutan***

Berikut diberikan sifat-sifat dari urutan dalam **R**.

**Teorema 2.2.1.** *Misal a, b, c elemen-elemen dalam* ***R****.*

*a. Jika a > b dan b > c, maka a > c.*

*b. Berlaku tepat satu dari berikut ini:*

*a > b, a = b , a < b.*

*c. Jika a ≥ b dan a ≤ b, maka a = b*.

Bukti. a. a > b ⇒ (a - b) ∈ P

b > c ⇒ (b - c ) ∈ P

[(a - b) + ( b - c)] ∈ P [a ∈ P, b ∈ P ⇒ a + b ∈ P]

[a + (-b + b) - c] ∈ P [sifat asosiatif (A.2)]

[a + 0 - c] ∈ P [sifat inversi (A.5)]

(a - c) ∈ P [sifat identitas (A.4)]

⇒ a > c

Jadi, a > b dan b > c ⇒ a > c

b. Dari sifat trichotomi, didapat kemungkinan

(a - b) ∈ P, (a -b) = 0, -(a - b) ∈ P

atau a > b, a = b, a < b.

c. Andaikan a ≠ b, maka a - b ≠ 0, maka kemungkinannya

(a - b) ∈ P atau -(a - b) ∈ P.

(a - b) ∈ P ⇒ a > b kontradiksi dengan a ≤ b

-(a - b) ∈ P ⇒ a < b kontradiksi dengan a ≥ b

Dengan demikian pengandaian salah, maka yang benar a = b.

**Teorema 2.2.2**. *a. Jika a ∈R dan a ≠ 0, maka a > 0.*

*b. 1 > 0.*

*c. Jika n ∈ A, maka n > 0.*

**Bukti.** a. Jika a ∈ R dan a ≠ 0, berdasar sifat trichotomi a ∈ P atau -a ∈ P.

a ∈ P ⇒ a . a ∈ P

⇒ a ∈ P

atau a > 0.

- a ∈ P ⇒ (-a).(-a) ∈ P

(-a).(-a) = (-1 a).(-1 a) [teorema 2.1.4.b.]

= (-1)(-1) a.a [M2 dan M3]

= 1 a [(-1)(-1) = 1 [teo 2.1.4.d.]

= a ∈ P [identitas (M.4.)]

atau a > 0

b. Karena 1 ≠ 0 dan 1 = 1 . 1 = 1 juga 1 = (-1)(-1) = (-1)

maka 1 > 0 [teorema 2.2.2b]

c. Dengan menggunakan induksi matematika:

Untuk n = 1

berdasar teorema 2.2.2b, maka n > 0.

Karena untuk n = 1 pernyataan benar, maka diasumsikan pernyataan benar untuk

n = k, berarti k > 0

Mudah ditunjukkan, bahwa n = k + 1 > 0, yaitu

k > 0 ⇒ k ∈ P dan 1 > 0 ⇒ 1 ∈ P

akibatnya k + 1 ∈ P [a ∈ P dan b ∈ P ⇒ a + b ∈ P]

atau n = k + 1 > 0.

Jadi, ∀n ∈ **A** ⇒ n > 0.

**Teorema 2.2.3.** *Misal a, b, c, d ∈ R.*

*a. Jika a > b, maka a + c > b + c.*

*b. Jika a > b dan c > d, maka a + c > b + d.*

*c. Jika a > b dan c > 0, maka ca > cb.*

*Jika a > b dan c < 0, maka ca < cb.*

*d. Jika a > 0, maka 1/a > 0.*

*Jika a < 0, maka 1/a < 0.*

**Bukti**. a. a > b ⇒ a - b ∈ P

a - b = a - b + (c - c) ∈ P [a + 0 = a (A.4)]

= (a + c) - (b + c) ∈ P [sifat asosiatif (A.2)]

⇒ (a + c) > (b + c)

b. a > b ⇒ a - b ∈ P

c > d ⇒ c - d ∈ P

(a - b) + (c - d) ∈ P [a ∈ P, b ∈ P ⇒ a + b ∈ P]

(a + c) - (b + d) ∈ P [asosiatif (A.2)]

⇒ (a + c) > (b + d)

c.1. a > b ⇒ a - b ∈ P

c > 0 ⇒ c ∈ P

c(a - b) ∈ P [a ∈ P, b ∈ P ⇒ ab ∈ P]

ca - cb ∈ P [sifat distributif]

ca > cb.

c.2. a > b ⇒ a - b ∈ P

c < 0 ⇒ -c > 0 atau -c ∈ P

-c(a - b) ∈ P

⇒ -ca + cb ∈ P [sifat distributif]

⇒ cb - ca ∈ P [sifat komutatif (A.3)]

cb > ca atau ca < cb

d.1. a > 0 ⇒ a ≠ 0 ⇒ 1/a ≠ 0

andaikan 1/a < 0, maka 1 = a x 1/a < 0

kontradiksi dengan 1 > 0

Dengan demikian, pengandaian salah dan yang benar 1/a > 0

Jadi a > 0 ⇒ 1/a > 0.

d.2. dengan cara yang sama untuk a < 0 ⇒ 1/a < 0

**Teorema 2.2.4.** *Misal a, b ∈ R. Jika a > b, maka a > 1/2 (a + b) > b.*

**Bukti.** a > b ⇒ a + a > a + b [teorema 2.2.3a]

⇒ 2a > a + b

⇒ a > 1/2 (a + b) \*)

a > b ⇒ a + b > b + b [teorema 2.2.3a]

⇒ a + b > 2b

⇒ 1/2 (a + b) > \*\*) [kedua ruas x 1/2 > 0 dan teorema 2.2.3c.]

Dari \*) dan \*\*), diperoleh a > 1/2 (a + b) > b.

Jadi, a > b ⇒ a > 1/2 (a + b) > b.

Akibatnya, Aa ∈ R dan a > 0 ⇒ a > 1/2 a > 0.

**Teorema 2.2.5.** *∃a ∈* ***R*** *∍ 0 ≤ a < ε ∀ε > 0 ⇒ a = 0.*

**Bukti**. Andaikan a > 0 ⇒ a > 1/2 a > 0 [akibat teorema 2.2.4]

Pilih ε = 1/2 a ⇒ a > ε > 0.

Timbul kontradiksi, karena ε > a , ∀ ε > 0.

Dengan demikian, pengandaian a > 0 salah, yang benar a = 0.

**Teorema 2.2.6.** *ab > 0 ⇒ a > 0 dan b > 0 atau a < 0 dan b < 0.*

**Bukti.** ab > 0 ⇒ a ≠ 0 dan b ≠ 0

a > 0 ⇒ 1/a > 0

b = 1.b = (1/a . a) b

= 1/a (ab) > 0 [1/a > 0 dan ab > 0]

Jadi, ab > 0 ⇒ a > 0 dan b > 0.

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa

ab > 0 ⇒ a < 0 dan b < 0, yaitu

a < 0 ⇒ 1/a < 0

b = 1 . b = (1/a .a)b

= 1/a (ab) < 0 [1/a < 0 dan ab > 0]

Jadi, ab > 0 ⇒ a < 0 dan b < 0.

Akibatnya, ab < 0 ⇒ a > 0 dan b < 0 atau a < 0 dan b > 0.

**Ketidaksamaan**

Suatu pernyataan yang dihubungkan dengan tanda < atau < atau ≤ atau ≥ disebut

ketidaksamaan. Berikut diberikan beberapa contoh:

Contoh 1. Tentukan himpunan penyelesaian dari 2x + 2 ≤ 7, dengan x ∈ **R**.

Penyelesaian. 2x + 2 ≤ 7 ⇒ 2x ≤ 5 ⇒ x ≤ 2 1/2.

Jadi, HP = { x ∈ **R** | x ≤ 2 1/2 }

Contoh 2. Jika 0 < a < b, maka a < b .

Penyelesaian. 0 < a < b ⇒ b - a > 0 dan b + a > 0.

(b - a)(b + a) > 0 ⇒ b - a > 0 ⇒ a < b .

Beberapa ketidaksamaan yang penting diantaranya ketidaksamaan Bernoulli, ketidaksamaan Cauchy dan ketidaksamaan segitiga.

***Ketidaksamaan Bernoulli.***

x > -1 ⇒ (1 + x) ≥ 1 + nx ∀n ∈ **A**.

Bukti. Ketidaksamaan ini dibuktikan dengan induksi mate-matika.

Untuk n = 1 ⇒ (1 + x) ≥ 1 + x

Karena untuk n = 1 pernyataan valid, maka diasumsikan pernyataan valid untuk n = k, sehingga berlaku

x > -1 ⇒ (1 + x) ≥ 1 + kx Ak ∈ A

Selanjutnya dibuktikan apakah berlaku untuk n = k + 1

Karena 1 + x > 0, maka memenuhi

(1 + x)k+1 = (1 + x)k (1 + x)

≥ (1 + kx)(1 + x) = 1 + (k + 1)x + kx

≥ 1 + (k + 1)x

Dengan demikian, x > -1 ⇒ (1 + x) ≥ 1 + nx berlaku untuk setiap n

elemen bilangan asli (**A**).

**Ketidaksamaan Cauchy.**

n ∈ **A** dan ai∈ **R**, bi ∈ **R** , i = 1, 2, ...,n ⇒ (a1b1 + … +  an bn) ≤ (

***(Buktikan, sebagai latihan)***

**Ketidaksamaan segitiga.**

n ∈ **A** dan ai ∈ **R**, bi ∈ **R** , i = 1, 2, ...,n ⇒

[(a1 + b1)]2 + … + (an + bn)2]1/2 ≤ (

***(Buktikan, sebagai latihan)***

**L A T I H A N 2.2.**

1. Jika 0 < a < b dan 0 < c < d, buktikan 0 < ac < bd.

2. Jika a < b dan c < d, buktikan ad + bc < ac + bd.

3. Tentukan a, b, c, d ∈ **R** yang memenuhi 0 < a < b dan c < d < 0 ⇒ ac < bd atau bd < ac.

4. Jika a,b ∈ **R**, tunjukkan bahwa a + b = 0 a = 0 dan b = 0.

5. Tunjukkan bahwa, 0 < a < b ⇒ a < < b dan 0 < 1/b < 1/a.

6. Jika 0 < c < 1, tunjukkan 0 < c2 < c < 1.

7. Jika c > 1, tunjukkan bahwa cn > c ∀n ∈ **A**.

8. Jika c > 1, m, n ∈ **A,** buktikan cm > cn ⇔ m > n.

9. Jika 0 < c < 1, tunjukkan cn ≤ c ∀n ∈ **A**.

10. Jika a > 0, b > 0 dan n ∈ **A**, buktikan a < b ⇔ an < bn .